バナッハ空間における4つの非線形射影と閉凸集合列の Mosco 収束(非加法の数理と情報 : 函数解析の視点から)

AUTHOR(S):

茨木, 貴徳; 高橋, 渉

CITATION:

茨木, 貴徳 ...[et al]. バナッハ空間における4つの非線形射影と閉凸集合列の Mosco 収束(非加法の数理と情報 : 函数解析の視点から). 数理解析研究所講究録 2007, 1561: 144-151

ISSUE DATE:

2007-06

URL:

http://hdl.handle.net/2433/81076

数理解析研究所講究録
第1561巻 2007年 144-151

バナッハ空間における4つの非線形射影と閉凸集合列の Mosco 収束

茨木貴徳 (Takanori Ibaraki)
名古屋大学情報連携統括本部
Information and Communications Services Headquarters, Nagoya University
高橋渉 (Wataru Takahashi)
東京工業大学大学院情報理工学研究科
Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

H を Hilbert 空間とし, C をその空でない閉凸集合とする. このとき, 任意の $x \in H$ に対して

$$\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$$

となるような $z \in C$ が一意に存在する. このことはよく知られた事実である. そこで, $x \in H$ に対して, このような元 z を対応させる写像を P_C で表し, P_C を H から C の上への距離射影と呼ぶことにする. この距離射影 P_C は, 次の重要な性質を持っている. すなわち, $z = P_C x$ であることの必要十分条件は

$$\langle x - z, z - y\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \tag{1.1}$$

が成り立つことである. この性質を用いると, P_C は nonexpansive 写像, すなわち

$$\|P_C x - P_C y\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in H$$

であることがわかる.

Hilbert 空間上での距離射影の概念は Banach 空間の場合にも拡張される. E を回帰的で狭義凸な Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, 任意の $x \in E$ に対して,

$$\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$$

となるような $z \in C$ は一意に存在するが, $x \in E$ に対して, このような C の元 z を対応させる写像をやはり, P_C で表し, P_C を E から C の上への距離射影と呼ぶのである. Banach 空間の距離射影に関しても狭義凸で回帰的で滑らかな場合 (1.1) と同様の重要な性質を持っている. すなわち, $z = P_C x$ であることの必要十分条件は

$$\langle J(x - z), z - y\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \tag{1.2}$$

が成り立つことである. ただし, J は E の双対写像である.

一方, Mosco[13] は, $\{C_n\}$ を Banach 空間の空でない閉凸集合の列とするとき, $\{C_n\}$ の強下極限集合 s-$\mathrm{Li}_n C_n$ と弱上極限集合 w-$\mathrm{Ls}_n C_n$ を

$$x \in \operatorname*{s\text{-}Li}_n C_n \iff \exists\{x_n\} \subset E :\ x_n \in C_n\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ x_n \to x$$

および

$$x \in \text{w-}\mathop{\mathrm{Ls}}_{n} C_n \iff \exists\{C_{n_i}\} \subset \{C_n\} : x_{n_i} \in C_{n_i}\ (\forall i \in \mathbb{N}),\ x_{n_i} \rightharpoonup x$$

で定義し, $C_0 = \text{s-Li}_n C_n = \text{w-Ls}_n C_n$ であるならば, $\{C_n\}$ は C_0 に Mosco 収束するといい,

$$C_0 = \text{M-}\lim_{n} C_n$$

で表した. Banach 空間 E の閉凸集合列 $\{C_n\}$ の Mosco 収束と距離射影の列 $\{P_{C_n}\}$ の収束との間には大きな関わりがある. 塚田 [19] は 1984 年に次の定理を証明した.

定理 1.1 ([19]). *E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし, その双対空間 E^* も Fréchet 微分可能なノルムをもつものとし, $C_0, C_1, C_1, \ldots$ を E の空でない閉凸集合とする. 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, P_n を E から C_n の上への距離射影とする. このとき, 次の (1) と (2) は同値になる.*

(1) $C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$

(2) $\lim_{n\to\infty} P_n x = P_0 x,\ \forall x \in E$

本論文では, Banach 空間における閉凸集合列の Mosco 収束と射影の列に関する収束について研究する. Hilbert 空間上での距離射影の概念を Banach 空間に拡張する場合, 距離射影と異なる 3 つの非線形射影があることが著者等の研究によって明らかにされた. ここでは, その 3 つの射影を研究し, さらに Banach 空間の空でない閉凸集合の列 $\{C_n\}$ の収束性と射影の収束性の関係について論じる. すなわち塚田タイプの収束定理が成り立つかどうかを議論する.

2 準備

E を Banach 空間とし, E^* をその共役空間とする. E が狭義凸であるとは, $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ となる E の元 $x, y (x \neq y)$ に対して, つねに $\|x + y\| < 2$ が成り立つことである. 同様に, 一様凸であるとは, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ となる E の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して, つねに $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ となることである.

Banach 空間 E の元 x に対して, E^* の部分集合

$$J(x) := \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像 J のことを, E の双対写像と呼ぶ.

この双対写像 J は E のノルムの微分可能性とも大いに関わりをもつ. いま $S(E) := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, $x, y \in S(E)$ に対して, 次の極限を考える.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

Banach 空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは, $S(E)$ の元 x, y に対して, つねに (2.1) が存在するときをいう. このとき, 空間 E は滑らかであるともいう. 任意の $y \in S(E)$ に対して, (2.1) が $x \in S(E)$ に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能であるという. 任意の $x \in S(E)$ に対して, (2.1) が $y \in S(E)$ に関して一様に収束するとき, E のノルムが Fréchet 微分可能であるという. (2.1) が $S(E)$ の元 x, y に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Fréchet 微分可能であるという. このとき, 空間 E は一様に滑らかであるともいう.

Banach 空間 E での双対写像 J とノルムの微分可能性に関しては次のような性質が知られている ([15, 16] を参照).

1. $x \in E$ に対して, $J(x)$ は空でない有界な閉凸集合である;
2. $x, y \in E$ と $x^* \in J(x)$, $y^* \in J(y)$ に対して, $\langle x-y, x^*-y^* \rangle \geq 0$ である;
3. E が狭義凸であるための必要十分条件は, J が1対1となることである.
すなわち, $x \neq y \;\Rightarrow\; J(x) \cap J(y) = \emptyset$.
4. E が狭義凸であるための必要十分条件は,
$x^* \in J(x)$, $y^* \in J(y)$, $x \neq y \Rightarrow \langle x-y, x^*-y^* \rangle > 0$ である;
5. E が回帰的であるための必要十分条件は, J が全射となることである;
6. E が滑らかにであるための必要十分条件は, J が一価になることである;
7. E^* が Fréchet 微分可能なノルムをもつための必要十分条件は, E が狭義凸かつ回帰的で, 下記が成り立つことである.
$x_n \rightharpoonup x \;\&\; \|x_n\| \to \|x\| \;\Rightarrow\; x_n \to x$

3 sunny nonexpansive retraction と Mosco 収束

E を Banach 空間とし, C を E の空でない集合とする. このとき, E から C 上への写像 Q が sunny であるとは, 任意の $x \in E$ と $t \geq 0$ に対して

$$Q(Qx + t(x - Qx)) = Qx$$

が成り立つことである. 同様に, E から C 上への写像 Q が retraction であるとは, 任意の $x \in C$ に対して, $Qx = x$ が成り立つことである. E を滑らかな Banach 空間とするとき, E から C 上への retraction Q が sunny かつ nonexpansive であることと,

$$\langle x - Qx, J(Qx - y) \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \tag{3.1}$$

が成り立つことは同値である. E が滑らかな Banach 空間では, E から C 上への sunny nonexpansive retraction は一意に決まる ([17] を参照). そこで, E が滑らかな Banach 空間だった場合に E から C の上への sunny nonexpansive retraction を Q_C で表すことにする. C を E の空でない集合とする. このとき, C が sunny nonexpansive retract (nonexpansive retract) であるとは, E から C の上への sunny nonexpansive retraction (nonexpansive retraction) が存在するときをいう. Bruck[4, 5] は nonexpansive retract に関して次の定理を得た.

定理 3.1 ([4, 5]). *E を回帰的な Banach 空間とし, 正規構造をもつものとする. T を E から E への nonexpansive 写像とし, $F(T) \neq \emptyset$ とする. このとき, $F(T)$ は nonexpansive retract である.*

さらに, Reich[14], 高橋-上田 [18] は sunny nonexpansive retract に関して次の定理を得た.

定理 3.2 ([14, 18]). *E を回帰的な Banach 空間とし, 一様 Gâteaux 微分可能なノルムを持つとする. さらに, E は正規構造をもつものとする. T を E から E への nonexpansive 写像とし, $F(T) \neq \emptyset$ とする. このとき, $F(T)$ は sunny nonexpansive retract である.*

以上のような準備のもとで, 1999 年に木村-高橋 [12] が sunny nonexpansive retraction に関して次の定理を得た.

定理 3.3 ([12]). *E を回帰的な Banach 空間とし, 一様 Gâteaux 微分可能なノルムを持つとする. また, E は正規構造をもつものとし, $C_1, C_2, C_3, \ldots$ を空でない convex sunny nonexpansive retract の列*

で, $C_0 = \text{M-lim}_n C_n$ が存在するものとする. $C_0 \neq \emptyset$ ならば, C_0 は *convex sunny nonexpansive retract* である. さらに, E の双対写像 J が弱点列連続であるならば, 任意の $x \in E$ に対して,

$$Q_{C_n}x \to Q_{C_0}x$$

である.

また, 2006 年には茨木-高橋 [9] は次の定理を得た.

定理 3.4 ([9]). E を狭義凸で回帰的な *Banach* 空間とし, $C_0, C_1, C_2, \ldots$ を空でない *convex sunny nonexpansive retract* の列とし, E の双対写像 J が弱点列連続とする. さらに, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, Q_n を E から C_n の上への *sunny nonexpansive retraction* とし, 任意の $x \in E$ に対して $\lim_{n\to\infty} Q_n x = Q_0 x$ ならば,

$$C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$$

である.

定理 3.3 及び定理 3.4 より次の定理が得られる.

定理 3.5 ([9, 12]). E を回帰的な *Banach* 空間とし, 一様 *Gâteaux* 微分可能なノルムを持つとする. また, E は正規構造をもつものとし, $C_0, C_1, C_2, \ldots$ を空でない *convex sunny nonexpansive retract* の列とし, E の双対写像 J が弱点列連続とする. さらに, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, Q_n を E から C_n の上への *sunny nonexpansive retraction* とする. このとき, 次の *(1)* と *(2)* は同値になる.

(1) $C_0 = \text{M-lim}_n C_n$

(2) 任意の $x \in E$ に対して, $\lim_{n\to\infty} Q_n x = Q_0 x$.

定理 3.5 は同様の証明で次のように拡張することができる.

定理 3.6. E を回帰的な *Banach* 空間とし, 一様 *Gâteaux* 微分可能なノルムを持つとする. また, E は正規構造をもつものとし, $C_0, C_1, C_2, \ldots$ を空でない *convex sunny nonexpansive retract* の列とし, E の双対写像 J が弱点列連続とする. さらに, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, Q_n を E から C_n の上への *sunny nonexpansive retraction* とする. このとき, 次の *(1)* と *(2)* は同値になる.

(1) $C_0 = \text{M-lim}_n C_n$

(2) 任意の $x \in E$ と x へ収束する任意の点列 $\{x_n\} \subset E$ に対して, $\lim_{n\to\infty} Q_n x_n = Q_0 x$.

4 generalized projection と Mosco 収束

E を滑らかで, 狭義凸, 回帰的な Banach 空間とし, J を E から E^* への双対写像とする. このとき,

$$V(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, J(y)\rangle + \|y\|^2, \quad \forall x, y \in E$$

で $E \times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を定義する. C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, 任意の $x \in E$ に対して

$$V(z, x) = \min\{V(y, x) : y \in C\}$$

となるような $z \in C$ が一意に存在する ([1] を参照). そこで, $x \in E$ に対して, このような C の元 z を対応させる写像を Π_C で表し, Π_C を E から C の上への generalized projection と呼ぶことにする. こ

の generalized projection Π_C は, 次の重要な性質を持っている. すなわち, $z = \Pi_C x$ であることの必要十分条件は

$$\langle Jx - Jz, z - y\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \tag{4.1}$$

が成り立つことである. ([1, 11] を参照)

2003 年に茨木-木村-高橋 [7] が generalized projection に関して次の定理を得た.

定理 4.1 ([7]). *E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし, その双対空間 E^* も Fréchet 微分可能なノルムをもつものとし, $C_0, C_1, C_1, \ldots$ を E の空でない閉凸集合とする. 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, Π_n を E から C_n の上への generalized projection とする. このとき, 次の (1) と (2) は同値になる.*

(1) $C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$

(2) 任意の $x \in E$ に対して, $\lim_{n\to\infty} \Pi_n x = \Pi_0 x.$

定理 4.1 は同様の証明で次のように拡張することができる.

定理 4.2. *E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし, その双対空間 E^* も Fréchet 微分可能なノルムをもつものとし, $C_0, C_1, C_1, \ldots$ を E の空でない閉凸集合とする. 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, Π_n を E から C_n の上への generalized projection とする. このとき, 次の (1) と (2) は同値になる.*

(1) $C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$

(2) 任意の $x \in E$ と x へ収束する任意の点列 $\{x_n\} \subset E$ に対して,
$\lim_{n\to\infty} \Pi_n x_n = \Pi_0 x.$

5 sunny generalized nonexpansive retraction と Mosco 収束

E を滑らかな Banach 空間とし, D を E の空でない閉凸集合とする. このとき, 写像 $R : D \to D$ が generalized nonexpansive であるとは, $F(R) \neq \emptyset$ であり, かつ

$$V(Rx, y) \leq V(x, y), \quad \forall x \in D,\ \forall y \in F(R)$$

がつねに成り立つことと定義する. E を滑らかで狭義凸な Banach 空間とし, C を空でない閉凸集合とする. また, R_C を E から C の上への retraction としたとき, R_C が suuny かつ generalized nonexpansive になる必要十分条件は,

$$\langle x - R_C x, J(R_C x) - J(y)\rangle \geq 0, \quad \forall x \in E,\ \forall y \in C \tag{5.1}$$

となることである. E が滑らかで狭義凸な Banach 空間では, E から C 上への sunny nonexpansive retraction は一意に決まる ([8, 10] を参照). そこで, E が滑らかな Banach 空間だった場合に E から C の上への sunny generalized nonexpansive retraction を R_C で表すことにする. C を E の空でない集合とする. このとき, C が sunny generalized nonexpansive retract (generalized nonexpansive retract) であるとは, E から C の上への sunny generalized nonexpansive retraction (generalized nonexpansive retraction) が存在するときをいう. 茨木-高橋 [10] は sunny generalized nonexpansive retract に関して次の定理を得た.

定理 5.1 ([10]). E を一様凸で *Fréchet* 微分可能なノルムを持つ *Banach* 空間とし, J を双対写像とする. $B \subset E^* \times E$ を極大単調作用素とし, $(BJ)^{-1}0 \neq \emptyset$ とする. このとき, $(BJ)^{-1}0$ は *sunny generalized nonexpansive retract* である.

さらに, 2006 年に茨木-高橋は次の 2 つの定理を得た.

定理 5.2 ([8, 10]). E を一様凸で *Fréchet* 微分可能なノルムを持つ *Banach* 空間とし, 双対写像 J が弱点列連続であるとする. また, $\{C_n\}$ を E の空でない *sunny generalized nonexpansive retract* の列で, $C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$ が存在するものとする. もし, $C_0 \neq \emptyset$ ならば, C_0 は *sunny generalized nonexpansive retract* である. さらに, 任意の $x \in E$ に対して, $R_{C_n}x \to R_{C_0}x$ である.

定理 5.3 ([9]). E を滑らかで, 狭義凸で, 回帰的な *Banach* 空間とし, $C_0, C_1, C_2, \ldots$ を空でない *convex sunny generalized nonexpansive retract* の列とし, E の双対写像 J が弱点列連続とする. さらに, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, R_n を E から C_n の上への *sunny generalized nonexpansive retraction* とし, 任意の $x \in E$ に対して $\lim_{n\to\infty} R_n x = R_0 x$ ならば,

$$C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$$

である.

定理 5.2 及び定理 5.3 より次の定理が得られる.

定理 5.4 ([8, 9, 10]). E を一様凸で *Fréchet* 微分可能なノルムを持つ *Banach* 空間とし, $C_0, C_1, C_2, \ldots$ を空でない *convex sunny generalized nonexpansive retract* の列とし, E の双対写像 J が弱点列連続とする. さらに, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, R_n を E から C_n の上への *sunny generalized nonexpansive retraction* とする. このとき, 次の *(1)* と *(2)* は同値になる.

(1) $C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$

(2) 任意の $x \in E$ に対して, $\lim_{n\to\infty} R_n x = R_0 x$.

定理 5.4 は同様の証明で次のように拡張することができる.

定理 5.5. E を一様凸で *Fréchet* 微分可能なノルムを持つ *Banach* 空間とし, $C_0, C_1, C_2, \ldots$ を空でない *convex sunny generalized nonexpansive retract* の列とし, E の双対写像 J が弱点列連続とする. さらに, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, R_n を E から C_n の上への *sunny generalized nonexpansive retraction* とする. このとき, 次の *(1)* と *(2)* は同値になる.

(1) $C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$

(2) 任意の $x \in E$ と x へ収束する任意の点列 $\{x_n\} \subset E$ に対して,
$\lim_{n\to\infty} R_n x_n = R_0 x$.

6 まとめ

本論文では Hilbert 空間の距離射影の Banach 空間への 4 つの拡張 (距離射影, generalized projection, sunny nonexpansive retraction, sunny generalized nonexpansive retraction) について議論してきた. そこでこの 4 つの射影の性質を比較してみたいと思う. 比較しやすいよう E を滑らか, 狭義凸, 回帰的な Banach 空間とする. C を E の閉凸集合とし, P_C, Π_C, Q_C, R_C を E から C の上への 距離射影,

generalized projection, sunny nonexpansive retraction, sunny generalized nonexpansive retraction とする．このとき，$x \in E$, $x_0 \in C$ に対して，

$$\begin{aligned}
x_0 = P_C x &\Leftrightarrow \langle J(x - x_0), x_0 - y\rangle \geq 0, \quad &\forall y \in C,\\
x_0 = \Pi_C x &\Leftrightarrow \langle J(x) - J(x_0), x_0 - y\rangle \geq 0, \quad &\forall y \in C,\\
x_0 = Q_C x &\Leftrightarrow \langle x - x_0, J(x_0 - y)\rangle \geq 0, \quad &\forall y \in C,\\
x_0 = R_C x &\Leftrightarrow \langle x - x_0, J(x_0) - J(y)\rangle \geq 0, \quad &\forall y \in C
\end{aligned}$$

である．Hilbert 空間での距離射影の重要な性質 (1.1) を考慮すると，これら 4 つの非線形射影は Banach 空間への拡張と考えたとき自然な拡張であると言えよう．実際，この 4 つの射影を Hilbert 空間で考えると全て同じ射影となることは容易にわかる．なぜなら，Hilbert 空間では双対写像 J は恒等写像 I にとなり，この 4 つの性質は (1.1) と一致するからである．

また，Banach 空間上での閉凸集合列の Mosco 収束と 4 つの非線形射影と関連した収束定理も全て必要十分条件として成立することが分った．

塚田 [19]	$\Rightarrow$	距離射影
木村-高橋 [12] & 茨木-高橋 [9]	$\Rightarrow$	sunny nonexpansive retraction
茨木-木村-高橋 [7]	$\Rightarrow$	generalized projection
茨木-高橋 [8, 9, 10]	$\Rightarrow$	sunny generalized nonexpansive retraction

さらに，距離射影とは異なる 3 つの非線形射影については，射影列の初期点を点列に拡張できることを示した．もちろん距離射影でもこのことは成り立つのである．すなわち，距離射影に関する定理 1.1 は同様の証明で次のように拡張することができる．

定理 6.1. *E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし，その双対空間 E^* も Fréchet 微分可能なノルムをもつものとし，$C_0, C_1, C_1, \ldots$ を E の空でない閉凸集合とする．任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して，P_n を E から C_n の上への距離射影とする．このとき，次の (1) と (2) は同値になる．*

(1) $C_0 = \text{M-lim}_n C_n$

(2) 任意の $x \in E$ と x へ収束する任意の点列 $\{x_n\} \subset E$ に対して，
$\lim_{n\to\infty} P_n x_n = P_0 x.$

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.

[2] D. Butnariu and A. N. Iusem, *Totally Convex Functions for Fixed Points Computation and Infinite Dimensional Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordecht, 2000.

[3] R. E. Bruck, *Nonexpansive retract of Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **76** (1970), 384–386.

[4] R. E. Bruck, *Properties of fixed-point sets of nonexpansive mapping in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **179** (1973), 251–262.

[5] R. E. Bruck, *A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., **53** (1974), 59–71.

[6] R. E. Bruck, *On the almost-convergence of iterative of a nonexpansive mapping on Hilbert space and the structure of the weak ω-limit set*, Israel J. Math., **29** (1978), 1–16.

[7] T. Ibaraki, Y. Kimura and W. Takahashi, *Convergence Theorems for Generalized Projections and Maximal Monotone Operators in Banach Spaces*, Abstract and Applied Analysis, **2003** (2003), 621–629.

[8] 茨木貴徳・高橋渉, 「バナッハ空間における新しい射影に関する収束定理」京都大学数理解析研究所講究録 1484, 2006, pp. 150-160.

[9] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Mosoco convergence of sequences of retracts of four nonlinear projections in Banach spaces*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka, eds.), Yokohama Publishers, in press.

[10] T. Ibaraki, W. Takahashi, *A new projection and Convergence theorems for the projections in Banach spaces*, to appear.

[11] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim., **13** (2002), 938–945.

[12] Y. Kimura and W. Takahashi, *Strong convergence of sunny nonexpansive retractions in Banach spaces*, PanAmer. Math. J., **9** (1999), 1–6.

[13] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. in Math., **3** (1969), 510–585.

[14] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach space*, J. Math. Anal. Appl., **75** (1980), 287–292.

[15] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis – Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.

[16] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[17] 高橋渉, *Convergence Theorems for Nonlinear Projections in Banach spaces*, 京都大学数理解析研究所講究録 1396, 2004, pp. 49–59.

[18] W. Takahashi and Y. Ueda, *On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators*, J. Math. Anal. Appl., **104** (1984), 546–553.

[19] M. Tsukada, *Convergence of best approximations in a smooth Banach space*, J. Approx. Theory, **40** (1984), 301–309.